1 Fourierovy řady

Definice 40 (Ortogonální a ortonormální množiny). *Nechť H je Hilbertův prostor, množinu $\{v_\alpha : \alpha \in A\}$ (kde A je nějaká indexová množina) nazýváme:*

- ***ortogonální**, pokud $\langle v_\alpha, v_\beta \rangle = 0$ pro všechna $\alpha, \beta \in A$, $\alpha \neq \beta$,*
- ***ortonormální**, pokud je ortogonální a $||v_\alpha|| = 1$ pro všechna $\alpha \in A$,*
- ***úplnou**, pokud platí $(\forall \alpha \in A : \langle v_\alpha, v \rangle = 0) \implies (v = 0)$.*

Věta 41 (o nejlepší aproximaci). *Nechť H je Hilbertův prostor se spočetnou ortonormální množinou $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Potom pro všechna $v \in H$, $N \in \mathbb{N}$ a všechny posloupnosti (koeficientů) $\{\alpha_n\}$ platí*

$$\left|\left| v - \sum_{n=1}^{N} \alpha_n v_n \right|\right| \geq \left|\left| v - \sum_{n=1}^{N} a_n v_n \right|\right|,$$

kde $a_n = \langle v, v_n \rangle$, $n \in \mathbb{N}$.

Definice 42 (abstraktní Fourierova řada). *Nechť H je Hilbertův prostor se spočetnou ortonormální množinou $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $v \in H$ a $a_n = \langle v, v_n \rangle$, $n \in \mathbb{N}$. Symbol $\sum_{n=1}^{\infty} a_n v_n$ nazýváme **abstraktní Fourierovou řadou** v vzhledem k $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ (zkráceně zapisujeme $f \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n v_n$). Číslo a_n pak n-**tým Fourierovým koeficientem** (v vzhledem k $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$).*

Věta 43 (o Besselově nerovnosti a Parsevalově rovnosti). *Nechť H je Hilbertův prostor se spočetnou ortonormální množinou $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ a $f \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n v_n$. Potom platí (tzv. **Besselova nerovnost**)*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 \leq ||v||^2,$$

*přičemž rovnost (tzv. **Parsevalova rovnost**) nastává právě tehdy, kdž platí*

$$\lim_{N\to\infty} \left|\left| v - \sum_{n=1}^{N} a_n v_n \right|\right| = 0.$$

Věta 44 (Riezs-Fischerova věta). *Nechť H je Hilbertův prostor se spočetnou ortonormální množinou $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ a $a = \{a_n\} \in l_2$. Potom existuje $v \in H$, že $a_n = \langle v, v_n \rangle$, $n \in \mathbb{N}$ a $||v||_H = ||a||_2$.*

Věta 45 (charakteristika úplnosti ortonormální množiny). *Nechť H je Hilbertův prostor se spočetnou ortonormální množinou $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, potom jsou následující výroky ekvivalentní:*

1. *ortonormální množina* $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *je úplná,*

2. $\forall\, v \in H : \lim\limits_{N\to\infty} \left\| v - \sum\limits_{n=1}^{N} \langle v, v_n\rangle v_n \right\| = 0,$

3. $\forall\, v \in H : ||v||^2 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \langle v, v_n\rangle^2,$

4. *množina všech konečných lineárních kombinací prvků* $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *je hustá v* H.

Věta 46 (o existenci úplného ortonormálního systému)**.** *V každém separabilním Hilbertově prostoru existuje (spočetný) úplný ortonormální systém.*

Věta 47 (o izometrii s l_2)**.** *Každý nekonečně dimenzionální separabilní Hilbertův prostor je izometrický* l_2.

Definice 48 (uzavřený podprostor)**.** *Lineární podprostor* Z *normovaného lineárního prostoru* X *nazveme* ***uzavřený podprostor*** *prostoru* X, *pokud* Z *je uzavřená podmnožina* X.

Věta 49 (o ortogonální projekci)**.** *Nechť* H *je Hilbertův prostor a* M *jeho uzavřený podprostor. Potom pro každé* $f \in H$ *existuje právě jedno* $f_M \in M$, *že*

$$||f - f_M|| = \inf_{g\in M} ||f - g||.$$

Navíc, pro zobrazení $P : f \mapsto f_M$ *platí*

1. $P(M) = M,$

2. $P^2 = P,$

3. $(g = P(f)) \iff ((g \in M) \wedge (\forall h \in M : \langle f - g, h\rangle = 0)),$

4. *pro* $f \in H$ *platí* $||f||^2 = ||f - P(f)||^2 + ||P(f)||^2$